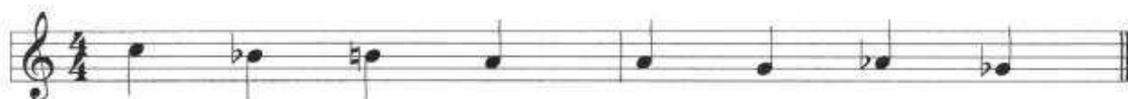


## Annexe 1

### TESSITURES D'UNE TROMPETTE ET D'UN TROMBONE.

La trompette, mais aussi le cornet, le bugle, l'euphonium, ... ont trois pistons. Chaque piston est un système mécanique qui permet de court-circuiter ou non un additif (portion de tube) permettant ainsi de transformer la base de l'instrument de longueur donnée (l'instrument naturel), en un instrument ayant plusieurs longueurs possibles.

Trois pistons offrent 8 combinaisons possibles, 8 doigtés. Les 8 combinaisons sont successivement, le doigté à vide (aucun piston en action), le doigté 1 (piston 1 enfoncé), le doigté 2, le doigté 3, le doigté 12 (pistons 1 et 2 en action), le doigté 13, le doigté 23, le doigté 123 (notons que l'ordre des doigtés présenté ici n'est pas chromatique, ordre familier des trompettistes).



Le piston 1 en action provoque un abaissement d'un ton, le piston 2 d'un demi-ton, le piston 3 d'un ton et demi. Si le doigté à vide correspond à un Do, les 7 autres doigtés dans l'ordre énoncé plus haut correspondent successivement aux notes Sib, Si, La, La, Sol, Lab, Solb (cf. la portée ci-dessus). Notons que parmi ces 8 doigtés, 2 correspondent par construction de l'instrument aux mêmes notes : 7 doigtés suffisent pour obtenir le chromatisme complet. Cela provient du fait que le partiel 2 est l'octave de la fondamentale, le partiel 3 la 12<sup>ième</sup> de la fondamentale, il suffit donc de 7 positions pour aller du partiel 2 au partiel 3 par demi-ton. A partir des doigtés présentés ci-dessus, le chromatisme est obtenu par les doigtés suivants :

«à vide» «123» «13» «23 » «12 » «1» «2 » «à vide» «23 » «12 » «1» «2»



«3» «123» «13 » «3 » «123» «13»

Si les doigtés au-dessus de la portée sont les doigtés les plus utilisés, il existe parfois des doigtés moins utilisés dit « doigtés factices » (doigtés sous la portée), doigtés qui modifient notablement le timbre et la justesse.

La tessiture du trombone à coulisse repose sur 7 positions de base correspondant à 7 allongements de coulisse demi-ton par demi-ton descendant à partir du Sib (coulisse bloquée) jusqu'à Mi (7<sup>ième</sup> position, allongement de coulisse maximum).

## Annexe 2

# ACOUSTIQUE DES PAVILLONS

Cette annexe n° 2 dédiée à l'acoustique des pavillons est un complément au chapitre 2.1.4 du texte principal. Certains éléments du chapitre 2.1.4 sont repris ci-dessous sans modification.

### 1- Introduction

Connaître le champ acoustique dans un pavillon dans le cadre de la théorie de l'acoustique linéaire sans pertes revient à résoudre l'équation des ondes (A2-1) appliquée au champ de pression auquel s'ajoutent des conditions aux limites en entrée et sortie de pavillon, et au niveau de la paroi interne (la composante normale du gradient de pression  $y$  est nulle).

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A2-1})$$

Plus simplement, l'équation des ondes peut être remplacée par l'équation de Helmholtz (A2-2) si le problème est traité dans le domaine fréquentiel ( $k = \omega/c$  est le nombre d'onde) :

$$\Delta p' + k^2 p' = 0 \quad (\text{A2-2})$$

Les solutions de l'équation ci-dessus sont simples si un système de coordonnées peut être choisi de manière à ce qu'une coordonnée maintenue constante définisse une surface coïncidant avec les parois, et que l'équation (A2-2) soit séparable dans le système de coordonnées en question. Malheureusement seul un nombre restreint de géométries de pavillons entrent dans cette catégorie (guide d'onde cylindrique et coordonnées cylindriques, guide d'onde conique et coordonnées sphériques). En pratique, la propagation acoustique dans les pavillons est traitée à partir de l'équation approchée dite de Webster (l'approximation essentielle provient de l'hypothèse ondes planes), proposée en premier lieu par Lagrange et Bernoulli (cf. le chapitre 2 qui suit). Cette équation est traitée dans quelques cas particuliers : pavillons exponentiels et de Bessel (chapitre 3). Pour finir (chapitre 4), une généralisation multimodale de l'équation de Webster est évoquée.

### 2- Des équations de base à l'équation de Webster

Un pavillon est un tuyau de section variable  $S(x)$  que l'on peut considérer comme une discrétisation en cellules élémentaires (petits éléments de cylindres d'épaisseur infinitésimale  $dx$ ) de sections différentes. Appliquons la conservation de la masse sur l'espace clos  $D_o$  limité par la surface  $S_o$  (supposée plane) d'une tranche de fluide, il vient :

$$\iiint_{D_o} \frac{\partial p'}{\partial t} dD_o + \rho_o \iint_{S_o} \vec{u}' \cdot d\vec{S}_o = 0 \quad (\text{A2-3})$$

En intégrant sur le volume et la surface d'une tranche de pavillon comprise entre les abscisses  $x$  et  $x+dx$ , l'équation (A2-3) devient :

$$S dx \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_o [(Su')_{x+dx} - (Su')_x] = 0 \quad \text{soit} \quad S \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_o \frac{\partial Su'}{\partial x} = 0, \quad (\text{A2-4})$$

où  $u'$  la vitesse particulière longitudinale dépend de  $x$  et de  $t$ , et la section  $S$  dépend de  $x$  seulement. Par ailleurs l'équation d'Euler (A2-5) reste valable :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0. \quad (\text{A2-5})$$

Sachant que la pression et la densité acoustiques vérifient  $p' = c_o^2 \rho'$ , après substitution de la densité par la pression dans (A2-4), puis application des opérateurs  $\frac{\partial}{\partial t}$  et  $\frac{\partial}{\partial x}$  aux équations (A2-4) et (A2-5), il suffit de retrancher ces 2 équations l'une à l'autre pour obtenir l'équation (A2-6) dite équation des pavillons ou équation de Webster :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad (\text{A2-6})$$

$$\text{soit } \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial \ln S}{\partial x} \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{ou } \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial \ln S}{\partial x} \frac{\partial p'}{\partial x} + k^2 p' = 0 \quad \text{dans le domaine fréquentiel.}$$

De fait cette équation approchée repose sur l'hypothèse dite de « variation lente de la section ». Les surfaces équi-phases sont considérées comme planes, ce qui en toute rigueur est contradictoire avec la condition aux limites « composante normale à la paroi du gradient de pression nulle ».

Autres formulations de l'équation de Webster.

L'équation de Webster est souvent réécrite de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 (p' \sqrt{S})}{\partial x^2} + (k^2 - H(x)) (p' \sqrt{S}) = 0, \quad \text{avec } H(x) = \frac{1}{\sqrt{S}} \frac{d^2 \sqrt{S}}{dx^2} \quad (\text{A2-7})$$

L'équation de Webster sous la forme ci-dessus est intéressante à discuter. En effet la quantité  $p' \sqrt{S}$  (et donc la pression  $p'$ ) est propagative ou non-propagative (évanescence). En fonction de la valeur de la fréquence, la quantité  $(k^2 - H(x))$

est négative ou positive, dans le premier cas (limite basse fréquence) les ondes sont évanescentes, dans le second cas (limite haute fréquence) les ondes sont propagatives. Le pavillon agit comme un filtre acoustique passe haut dont la fréquence de coupure est définie par l'égalité  $k^2 = H(x)$ .

### **3- Pavillons exponentiels et de Bessel**

#### Pavillon exponentiel

Le rayon  $R(x)$  du pavillon exponentiel est calculé en fonction de la distance  $x$  par la formule suivante :

$$R(x) = R_1 \cdot e^{m \cdot x}.$$

Le paramètre  $m$  est relié aux rayons d'entrée et de sortie  $R_1$  et  $R_2$ , à la longueur  $L$  du pavillon par la formule suivante :

$$m = \frac{1}{L} \log \left( \frac{R_2}{R_1} \right).$$

La fonction  $H(x)$  définie par (A2-7) associé au pavillon exponentiel est une constante indépendante de  $x$  :  $H(x) = m^2$ . Cela implique qu'en deçà de la fréquence de coupure  $F_c = \frac{1}{2\pi L} m c$ , les ondes sont évanescentes ; le pavillon exponentiel infini ne transmet pas les basses fréquences inférieures à  $F_c$ . Dans le cas du pavillon exponentiel de longueur finie, une faible part de ces ondes est transmise par « effet tunnel ». Ces caractéristiques du pavillon exponentiel infini et fini sont illustrées **figure 20** par le calcul du coefficient de transmission (définition au chapitre 2.1.4 du texte principal) : le coefficient de transmission tend vers 1 à haute fréquence. Le pavillon tend donc à se comporter comme un cylindre à la différence (essentielle) près que s'il débouche sur l'espace infini, l'impédance de rayonnement est beaucoup plus grande que celle du cylindre, puisque cette impédance croit en première approximation comme le carré du rayon. La transmission des fréquences aiguës est donc bien meilleure avec le pavillon exponentiel, celui-ci adapte l'impédance d'entrée à l'espace infini. Ce gain dans l'aigu est réalisé au détriment des graves : en deçà de la fréquence de coupure  $F_c$ , les ondes ne se propagent plus dans le pavillon, elles ne sont donc pas transmises vers le milieu extérieur (coefficient de transmission nul dans le cas du pavillon infini). Dans le cas plus réaliste du pavillon exponentiel de longueur finie, les deux comportements décrits ci-dessus restent qualitativement respectés, même si le coefficient de transmission n'est plus identiquement nul en deçà de la fréquence de coupure, et s'il fait apparaître un comportement résonant lié à la finitude du pavillon.

C'est cette propriété d'adaptation d'impédance entre la source et l'espace extérieur qui est utilisée dans les « portes voix » ou en sonorisation. Comme discuté dans le chapitre 2.1.4 du document principal, les pavillons des instruments de musique ne sont pas exponentiels mais semblent se rapprocher de pavillons de Bessel. Comme les pavillons exponentiels (sous-classe de la famille des pavillons caténoïdaux), les pavillons de Bessel forment une famille de pavillon pour laquelle l'équation des pavillons a des solutions explicites.

### Pavillon de Bessel

Le rayon  $R(x)$  du pavillon de Bessel est calculé en fonction de  $x$  par la relation suivante :

$$R(x) = \frac{R_f^{1+\alpha}}{(L-x+z_0)^\alpha}$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $R_f$  sont calculés à partir de des rayons d'entrée et de sortie  $R_1$  et  $R_2$ , de la longueur  $L$  du pavillon par les formules suivantes :

$$\alpha = \frac{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\log\left(\frac{L+z_0}{z_0}\right)} \quad \text{et} \quad R_f = \frac{1}{1+\alpha} [\log(R_1) + \alpha \log(L+z_0)]$$

Peut-on justifier du choix d'un pavillon de Bessel à la place d'un pavillon exponentiel pour une trompette ? Pour tenter de répondre à cette question, nous reprenons le cas d'école traité au chapitre 2.1.3 du texte principal (cylindre de longueur 900mm prolongé d'un pavillon de Bessel de longueur 380mm, cf. **figure 15a**), cas d'école que nous comparons aux deux autres cas suivants : le même cylindre est prolongé

d'un pavillon exponentiel ou d'un cône, la longueur et le rayon de sortie du pavillon étant le même dans les trois cas (**figure 21a**). L'impédance d'entrée de ces trois résonateurs est calculée selon la méthode présentée au chapitre 2.1.3. Les coefficients de transmission sont déduits des impédances selon la définition donnée en début de ce chapitre, ils sont tracés en fonction de la fréquence **figure 21b**. Par ailleurs les fréquences de résonance sont extraites des courbes d'impédance et reportées dans des diagrammes de justesse (**figure 21c**). Après analyse des figures 21b et 21c, il semble que le choix du pavillon de Bessel est lié à son meilleur compromis d'harmonicité par rapport aux deux autres pavillons traités, et non pas en raison de la transmission des ondes.

#### **4- Extension multimodale de l'équation des pavillons**

##### Limites de l'approximation ondes planes.

Comme indiqué précédemment, tous les calculs d'impédance d'entrée reposent sur des hypothèses dont l'une d'entre-elles, la propagation en ondes planes, est très discutable dans le cas des pavillons. Pour ces résonateurs, et pour les cônes, l'onde plane ne respecte pas les conditions aux limites à la paroi du guide d'onde. En effet dans le cas sans perte, avec des parois rigides, la composante normale à la paroi de la vitesse (ou le gradient de pression) acoustique est nulle. Or l'hypothèse ondes planes ne respecte cette nullité que dans le cas du guide d'onde à section constante, ce qui n'est évidemment pas le cas des pavillons. De fait les fronts d'ondes ne sont pas plans et dépendent de la géométrie du pavillon. Notons que dans le cas des pavillons coniques, les fronts d'ondes sont sphériques.

Si l'hypothèse onde plane n'est pas vérifiée, il n'est pas surprenant de vérifier que l'impédance d'entrée d'un pavillon calculée à partir de cette hypothèse n'est pas très réaliste. Ceci est vérifié aisément en comparant l'impédance d'entrée calculée suivant l'hypothèse ondes planes, avec l'impédance mesurée d'un pavillon de trompette (**figure 22a**). Dans le cas réaliste d'un cylindre de longueur 780mm prolongé du pavillon de trompette en question (portion cylindrique de 120 mm avant la partie évasée longue de 380mm), le décalage entre le calcul et la mesure est de l'ordre de 15 Hz sur la résonance n° 8 (**figure 22b**), soit 25 cents pour le Sib aigu de la trompette.

##### Extension multimodale

L'équation des pavillons est une équation approchée, comme indiqué plus haut une des limitations de la méthode est l'approximation onde planes ne respectant pas les conditions aux limites à la paroi du guide d'onde (les fronts d'ondes ne sont pas localement orthogonaux à la paroi). Il existe une approche matricielle généralisant l'équation des pavillons, qui donne des solutions respectant les conditions aux limites à la paroi. Donner une description détaillée de la méthode est hors de propos ici (pour plus de détail voir les références citées en fin d'annexe).

Cette approche repose sur une description multimodale du champ acoustique ; si il s'agit de traiter un pavillon axisymétrique, le champ acoustique est décomposé sur les modes propres du guide d'onde cylindrique. Les fonctions propres  $Y_i$  sont solutions de :

$$\Delta_{\perp} \Psi_i + \alpha_i^2 \Psi_i = 0, \text{ et sur le contour } C \text{ de la paroi } \frac{\partial \Psi_i}{\partial r} = 0$$

et la relation d'orthogonalité sur la section S  $\iint_S \Psi_i \Psi_j dS = S \delta_{ij}$ .

Les valeurs propres  $\alpha_i$  sont données par :  $\alpha_i = \frac{\gamma_i}{R}$  où les  $\gamma_i$  sont les zéros successifs des fonctions de

Bessel d'ordre 1 (pour le premier mode, le mode plan,  $\alpha_1=0$ ). La pression  $p(x,r)$  en tout point du guide peut être décomposée sous la forme :

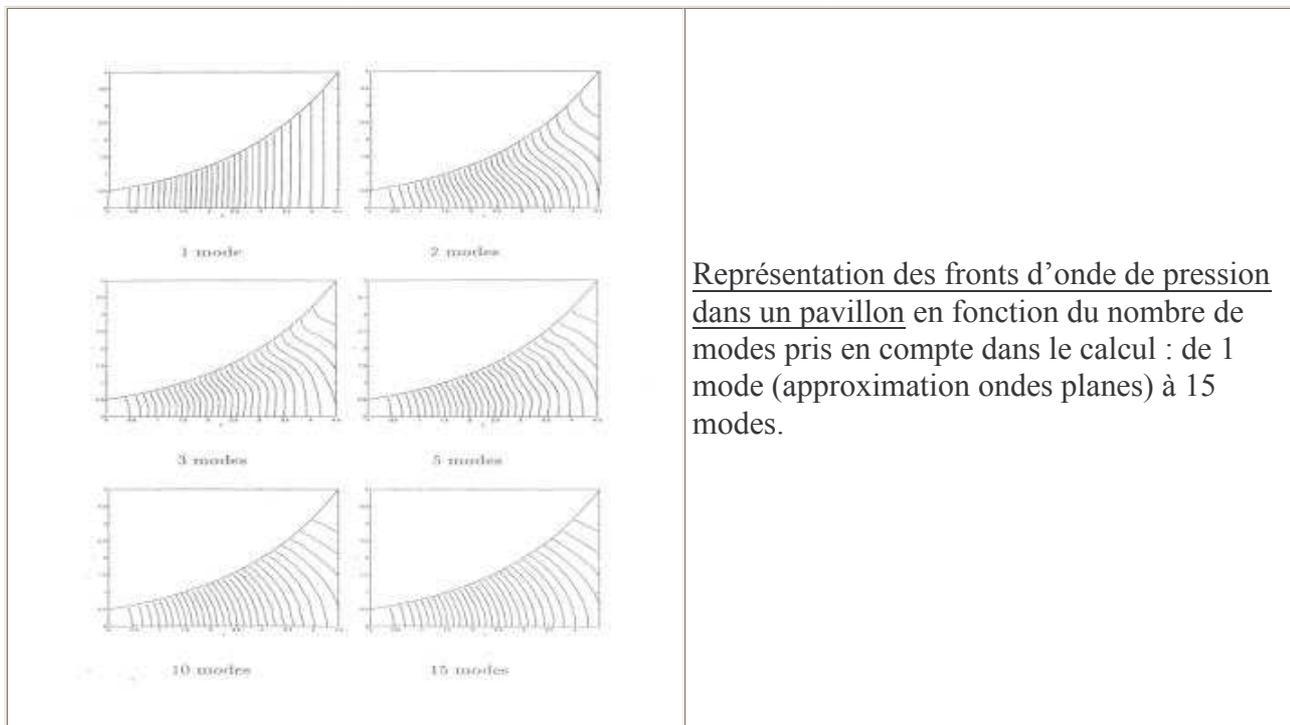
$$p'(x,r) = \sum_i \Psi_i(x,r) P_i(x) \quad (A2-8)$$

Les  $P_i$ , coefficients du développement modal, regroupés dans le vecteur  $\vec{P}$  sont solutions de l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial x^2} + (k^2 - A) \vec{P} = 0 \quad \text{où } A \text{ est la matrice diagonale des } \alpha_i^2. \quad (A2-9)$$

La matrice A étant diagonale, les différents modes se propagent dans le tube cylindrique indépendamment les uns des autres, il n'y a pas de couplage de modes. Notons en passant qu'à basses fréquences (en dessous de la première fréquence de coupure  $F_{c1}$  définie par  $F_{c1} = \frac{c}{2\pi} \alpha_2$ ), seul le mode plan est propagatif, les modes d'ordre supérieur sont évanescents.

Dans le cas des pavillons, l'équation scalaire (A2-6) est prolongée en une équation vectorielle plus compliquée que (A2-9) ; les modes y sont couplés de par l'existence de matrices non-diagonales dans l'équation. Une onde plane en entrée de pavillon se déforme au cours de la propagation et respecte la condition aux limites à la paroi. Si en toute rigueur il faut une infinité de modes pour avoir la solution exacte, une dizaine de modes suffisent à donner une image réaliste des fronts d'onde dans le pavillon (cf. la figure ci-dessous) ; par ailleurs l'apport d'un mode supplémentaire au mode plan (calcul avec 2 modes) permet de calculer des impédances d'entrée réalistes (voir la **figure 22**).



### Ouvrages de référence

- P.M. Morse et H. Feshbach (1953), « Methods of mathematical physics », Mc Graw-Hill.
- M. Bruneau (1998), « Manuel d'acoustique fondamentale », Hermès.
- M. Rossi (1986), « Electroacoustique », Dunod.
- 
- N. Amir, V. Pagneux et J. Kergomard (1997), « A study of wave propagation in varying cross-section

### Annexe 3

## PROPAGATION ACOUSTIQUE NON-LINEAIRE.

*Cette annexe n° 3 dédiée à la propagation acoustique non-linéaire est un complément au chapitre 2.2 du texte principal. Certains éléments du chapitre 2.2 sont repris ci-dessous sans modification.*

Les équations de base de l'acoustique sont non-linéaires. Pour un grand nombre d'applications les termes quadratiques sont du second ordre et peuvent être négligés. Dans ce cas les équations de base linéarisées mènent à l'équation des ondes (domaine temporel) ou à l'équation de Helmholtz (domaine fréquentiel). Dans cette annexe 3, le cas du fluide homogène au repos, parfait et soumis à des transformations isentropiques, est traité en détail : les équations de base sont traitées dans le cadre de l'acoustique linéaire dans un premier temps, puis dans le cadre de l'acoustique faiblement non linéaire dans un second temps. Après avoir retrouvé l'équation des ondes (acoustique linéaire), l'équation de Burgers (acoustique non linéaire) est dérivée. Pour ne pas alourdir inutilement le formalisme, seul le cas d'un milieu mono dimensionnel sans perte est traité en détail.

### 1- Equations de base du fluide dans un milieu 1D

En dehors des sources, le fluide homogène est supposé au repos, et le gaz parfait isentropique. Les équations de base sont dans l'ordre l'équation de conservation de la masse, l'équation de conservation de la quantité de mouvement, et l'équation isentropique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (A3-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (A3-2)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad (A3-3)$$

### 2- Acoustique linéaire

Le fluide étant supposé homogène et en l'absence de perturbation acoustique, les grandeurs stationnaires, la pression  $P_0$ , la densité  $\rho_0$  et la vitesse  $u_0$ , sont constantes indépendantes de la position  $x$ . De plus le fluide est supposé au repos ( $u_0=0$ ) en tout point. En présence de perturbations acoustiques, les grandeurs thermodynamiques sont réécrites de la manière suivante :  $p = P_0 + p'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$ ,  $u = u'$ . Dans le cadre de l'acoustique linéaire les perturbations acoustiques (quantités « primées ») sont supposées petites devant les grandeurs stationnaires. Dans ce cas les termes quadratiques (cf. le membre de gauche des équations de conservation) sont du second ordre et peuvent être négligés. Après linéarisation autour des grandeurs stationnaires, les équations de conservation (A3-1) et (A3-2) deviennent les équations (A3-4) et (A3-5), cette dernière étant connue sous le nom d'équation d'Euler :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (\text{A3-4})$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (\text{A3-5})$$

Par ailleurs la vitesse du son  $c$  adiabatique est définie par :  $c^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$ .

A partir de l'adiabatique du gaz parfait  $\frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$ , la vitesse du son vérifie  $c^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$ .

Sachant que la pression et la densité acoustique vérifient  $p' = c_0^2 \rho'$ , après élimination de la variable densité dans (A3-4), après application des opérateurs  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\rho_0 \frac{\partial}{\partial x}$  aux équations (A3-4) et (A3-5), et en les

retranchant l'une de l'autre, il vient :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A3-6})$$

L'équation des ondes (A3-6) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right] p' = 0.$$

L'onde de pression  $p'$  est décomposée en deux ondes simples,  $p^+$  et  $p^-$ , ondes aller et retour, respectivement solutions de  $\frac{\partial p^+}{\partial x} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial p^+}{\partial t} = 0$  et  $\frac{\partial p^-}{\partial x} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial p^-}{\partial t} = 0$ .

### 3- Acoustique faiblement non linéaire

#### 3.1- Adimensionnement des variables et simplification des équations de base

Soit  $M$  le nombre de Mach défini par  $M=U_0/c_0$  ( $U_0$  est une amplitude de vitesse acoustique caractéristique du problème, au niveau de la source par exemple). Dans le cadre de l'acoustique faiblement non-linéaire  $M$  est supposé très petit devant 1. Les grandeurs sont adimensionnées de la manière suivante (grandeurs adimensionnées représentées avec une "barre") :

$$\bar{u} = \frac{u}{U_0}, \bar{p} = \frac{P - P_0}{\rho_0 c_0 U_0}, \bar{\rho} = \frac{\rho - \rho_0}{M \rho_0}, \bar{t} = \omega t, \bar{x} = k_0 x = \frac{\omega}{c_0} x$$

Les équations de base (A3-1), (A3-2) et l'adiabatique du gaz parfait sont réécrites avec les grandeurs adimensionnées :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + M \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{p} \bar{u}) = 0 \quad (\text{A3-7})$$

$$(1 + M \bar{p}) \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + M \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (\text{A3-8})$$

$$1 + M \bar{p} = (1 + M \bar{p})^\gamma \quad (\text{A3-9})$$

#### 3.2- Méthode des échelles multiples et équations de Burgers

Suivant les méthodes de perturbation classiques, les variables sans dimension sont développées au

premier ordre du petit paramètre M :

$$u = u_0 + M u_1 + O(M^2), \quad p = p_0 + M p_1 + O(M^2), \quad \rho = \rho_0 + M \rho_1 + O(M^2). \quad (A3-10)$$

Les variables indexées par 0 et par 1 sont toutes supposées d'ordre 1.

### Résolution des équations de base adimensionnées par la méthode des échelles multiples

Suivant la méthode de perturbation particulière dite « méthode des échelles multiples », une variable "lente" X est introduite à partir de la variable x dite « rapide » du problème :  $X=Mx$ . L'opérateur  $\frac{\partial}{\partial x}$  est alors remplacé par  $\frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial X}$  dans les équations de base adimensionnées. Après avoir inséré les nouvelles variables définies en (A3-10) dans les équations de base, ces dernières sont analysées par ordre croissant du petit paramètre M.

### Equation de propagation au premier ordre (acoustique linéaire) :

A l'ordre le plus bas en M, les équations de base se réduisent à l'équation des ondes de l'acoustique linéaire comme suit (équation A3-6 adimensionnée) :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (u_0, p_0, \rho_0) = 0$$

dont la solution propagative dans le sens des x croissants est  $u_0 = p_0 = \rho_0 = q(\theta, X)$  où  $\theta = t - x$  est une phase adimensionnée.

### Au second ordre, équation de Burgers (acoustique faiblement non linéaire) :

Après annulation des termes séculaires du calcul au second ordre,  $q(\theta, X)$  est solution de l'équation différentielle non linéaire du premier ordre suivante :

$$\frac{\partial q}{\partial X} - \left( \frac{\gamma+1}{2} \right) q \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0. \quad (A3-11)$$

Après le changement de variable  $Z = \left( \frac{\gamma+1}{2} \right) X$

, l'équation hyperbolique ci-dessus peut être écrite sous la forme d'une équation de Burgers comme suit :

$$\frac{\partial q}{\partial Z} - q \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0. \quad (A3-12)$$

Si la source est sinusoïdale en entrée de tuyau (amplitude  $P_0$  en  $x=0$ ), l'onde se distord lors de la propagation : une partie de l'énergie contenue à la fréquence F de la source (amplitude  $q_1$ ) est transférée sur les harmoniques supérieures (amplitude  $q_2$  de l'harmonique 2 par exemple) selon les formules de Fubini. Au voisinage de la source,  $q_1$  et  $q_2$  vérifient :

$$q_1 = P_0 \left( 1 - \frac{\sigma^2}{8} \right) \quad \text{et} \quad q_2 = P_0 \frac{\sigma}{2},$$

où  $\sigma = x/x_c$  est l'abscisse adimensionnée par la distance de formation de choc  $x_c$  définie plus bas.

A longue distance de la source, l'onde initialement sinusoïdale se transforme en "onde N" (**figure 23**) faisant apparaître un "choc" (variation instantanée de pression) dans le domaine temporel, se traduisant par un spectre de raies de bande fréquentielle infinie. Dans le cadre de cette théorie sans perte, il existe une distance limite au-delà de laquelle il y a présence de choc, c'est à dire variation instantanée

de pression (pente infinie). Cette distance est la « distance de formation de choc »  $x_c$  :

$$x_c = \frac{2\gamma P_0 c_0}{(\gamma + 1) \left( \frac{dP}{dt} \Big|_{\max} \right)} \quad (\text{A3-13})$$

où  $\frac{dP}{dt} \Big|_{\max}$  est la valeur maximum de la dérivée temporelle du signal de pression en  $x=0$ .

Le phénomène de distorsion de l'onde lors de la propagation peut être décrit qualitativement de la façon suivante. Les variations de pression acoustique provoquent des zones de compression et d'expansion qui provoquent respectivement des augmentations et diminutions de température. Or la vitesse du son  $c$  dépend localement de la température :  $c$  est proportionnel à la racine carrée de la température absolue, elle est en donc une fonction croissante. Sur une période de la pression acoustique, le maximum de pression va donc se propager plus vite que le minimum et aura tendance à se rapprocher de ce dernier (phénomène de distorsion de l'onde) jusqu'à le « rattraper » (formation d'onde de choc). La résolution complète de ce problème dans le cas de l'onde simple est connue depuis longtemps pour le cas sans perte : « méthode des caractéristiques » ou des invariants de Riemann.

### Equation de Burgers généralisée

Dans la réalité, les angles de l'onde de choc sont « arrondis » par les phénomènes de pertes non pris en compte jusqu'ici. Après prise en compte des pertes visco-thermiques aux parois d'une part (terme du second membre avec dérivée  $1/2$  de l'équation A3-14 ci-dessous), des pertes visco-thermiques de volume d'autre-part (terme du second membre avec dérivée seconde), l'équation de Burgers est généralisée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial q}{\partial x} - \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right) q \frac{\partial q}{\partial \theta} = -B \frac{\partial^{1/2} q}{\partial \theta^{1/2}} + A \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} \quad (\text{A3-14})$$

La présence des termes de pertes aux parois rend la résolution analytique de cette équation impossible. Après résolution numérique on peut observer la distorsion de l'onde, supposée sinusoïdale à la source, comme illustré **figure 23**.

### Ouvrages de référence

- P. Thompson (1972), « Compressible fluid dynamics », Mc Graw-Hill, New-York.
- 
- O.V. Rudenko and S.I. Soluyan (1977), « Theoretical foundations of nonlinear acoustics », Consultants bureau, New-York and London.
- 
- D.G. Crighton, A.P. Dowling, J.E. Ffowcs Williams, M. Heckl, F.G. Leppington (1992), « Modern methods in analytical acoustics » Lectures notes, Springer-Verlag, New-York.